Теория экономического роста: от описания к объяснению

А.О. Беляков

Московская школа экономики
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

29 ноября 2025

Содержание

Литература

Barro, Robert J., Xavier Sala-i-Martin.
Economic Growth
Cambridge. MA: MIT Press., 2004

Daron Acemoglu
Introduction to Modern Economic Growth
Princeton University Press, 2008

Philippe Aghion, Peter Howitt
The economics of growth
The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2009

Свойства неоклассической производственной функции

1. Постоянная отдача от масштаба

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \forall \lambda \geq 0,$$

   - Считаем экономику достаточно большой, чтобы были исчерпаны возможности для специализации. Поэтому отдача от масштаба – не возрастает.
   - Считаем, что мы учли все значимые факторы производства. Поэтому отдача от масштаба – не убывает.

2. Убывающая предельная производительность факторов. [1]

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0,$$

   т.е. вогнутость по каждой переменной.[2]

[1] Это – причина отсутствия эндогенного роста ВВП на душу населения в неоклассических моделях роста.

[2] Чтобы сочетать свойства 1 и 2 производственная функция должна зависеть как минимум от двух факторов. Например, от капитала K и труда L.

Примеры функций с постоянной отдачей от масштаба

- Функции с постоянной эластичностью замещения (CES)

$$F(K,L) = (\alpha K^\eta + \beta L^\eta)^{\frac{1}{\eta}}, \tag{1}$$

- В частности (при $\eta = 1$) линейная однородная функция:

$$F(K,L) = \alpha K + \beta L$$

- Функция Кобба-Дугласа

$$F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha},$$

при $\alpha + \beta = 1$ равна пределу функции (1):

$$\lim_{\eta \to 0} (\alpha K^\eta + (1-\alpha) L^\eta)^{\frac{1}{\eta}} = K^\alpha L^{1-\alpha}.$$

- Функция Леонтьева

$$F(K,L) = \min\{K,L\}.$$

при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ равна пределу функции (1):

$$\lim_{\eta \to -\infty} (\alpha K^\eta + \beta L^\eta)^{\frac{1}{\eta}} = \min\{K,L\}.$$

Результаты свойства постоянной отдачи от масштаба неоклассической производственной функции

- Моделирование совершенной конкуренции.
- Удобство агрегирования.

Моделирование совершенной конкуренции

Фирмы должны получать нулевую операционную прибыль[3]

$$\Pi(K,L) = F(K,L) - R\,K - w\,L \to \max_{K\geq 0, L\geq 0} = 0,$$

- фирмы считают ставку аренды капитала R зарплату работников w заданными, из-за своей малости (pricetaker),
- отсутствуют "барьеры" для входа новых фирм на рынок.

Если производственная функция $F(K,L)$, то и прибыль $\Pi(K,L)$ с постоянной отдачей от масштаба. Тогда, по теореме Эйлера[4]:

$$\Pi(K,L) = \frac{\partial \Pi}{\partial K} K + \frac{\partial \Pi}{\partial L} L. \quad \text{В максимуме } \frac{\partial \Pi}{\partial K} K = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L} L = 0.$$

---

[3] Выручка от продажи товара за вычетом расходов на факторы производства

[4] Можно доказать дифференцированием $\lambda\Pi(K,L) = \Pi(\lambda K, \lambda L)$ по λ.

Модель Солоу (дискретное время), далее $L \equiv 1$

- фиксированная норма сбережений $s \in [0, 1]$.
- неоклассическая производственная функция.
- Технология бесплатна и доступна всем как неисключающий и неконкурируемый товар.
- закрытая экономика (инвестиции равны сбережениям $s\,F$:

$$\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\text{чистые инвестиции}} = \underbrace{s\,K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}}_{\text{валовые инвестиции}} - \underbrace{\delta\,K_t}_{\text{амортизация}}, \quad K_0 = K_0 > 0,$$

- g — экзогенный темп прироста эффективности труда A

$$\underbrace{A_{t+1} - A_t}_{\text{рост эффективности}} = g\,A_t, \quad A_0 = A_0 > 0.$$

Модель Солоу (дискретное время)

Динамика капитала и эффективности труда

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + s\,{k_t}^{\alpha-1} - \delta$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g,$$

[5]Динамика $k = \frac{K}{A\,L}$

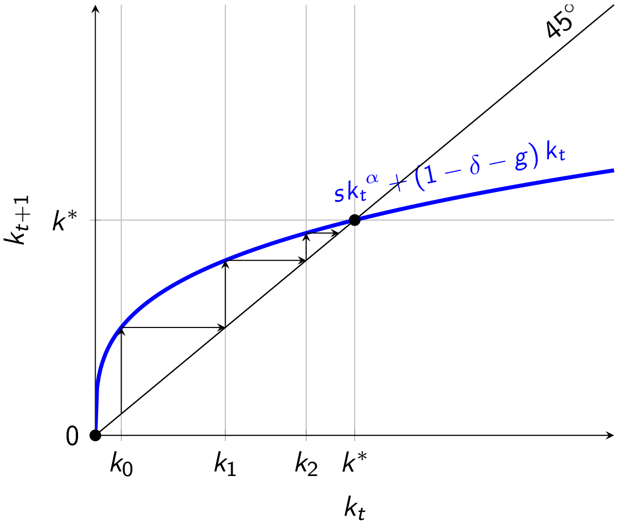
$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)\,k_t + s\,{k_t}^{\alpha}}{1+g} \approx s{k_t}^{\alpha} + (1-\delta-g)\,k_t$$

5

$$k = \frac{K}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{K_t} : \frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t}$$

При условии $\delta \sim n \sim g \sim s\,{k_t}^{\alpha-1}$.

Динамика капитала k_t в модели Солоу



Модель AK

Производственная функция с постоянной отдачей от капитала

$$Y_t = A\,K_t,$$

A — коэффициент.[6]

Накопление капитала неограниченно при $s\,A > \delta$

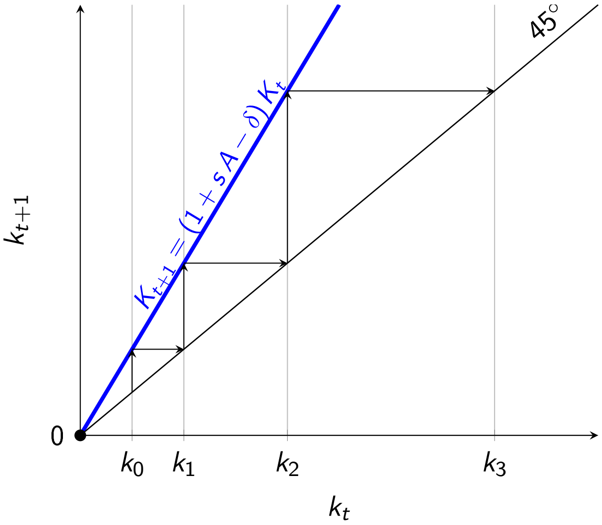
$$K_{t+1} - K_t = s\,A\,K_t - \delta\,K_t, \quad K_0 = K_0 > 0.$$

Темп роста

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = s\,A - \delta = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}.$$

[6] Например, из-за внешнего эффекта капитала на эффективность труда: $A_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}} K_t, Y = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} = A\,K_t$.

Динамика капитала K_t в модели AK



Полуэндогенная модель роста

Рост капитала

$$K_{t+1} - K_t = s\,K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} - \delta\,K_t,$$

и рост эффективности труда

$$A_{t+1} - A_t = \lambda\,K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha},$$

.

зависят от фиксированных экзогенных норм:
$\delta > 0$ – выбытия капитала,
$s > 0$ – инвестиций в физический капитал,
$v > 0$ – вложений в НИОКР.

Полуэндогенная модель роста

Динамика капитала, труда и эффективности

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + s\,{k_t}^{\alpha-1} - \delta$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + \lambda\,{k_t}^{\alpha},$$

Динамика k

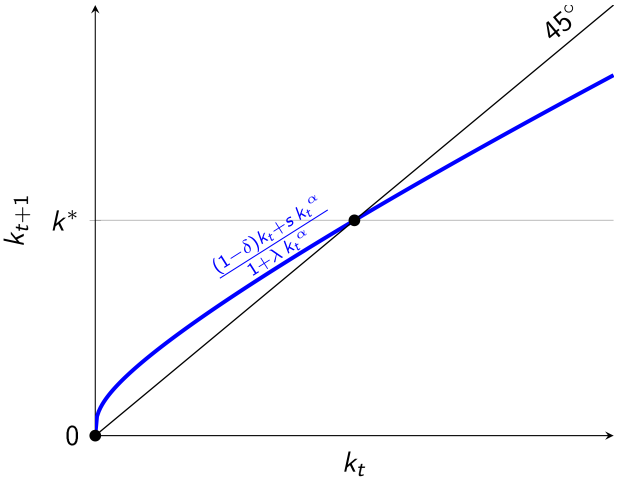
[7]

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)\,k_t + s\,{k_t}^{\alpha}}{1 + \lambda\,k_t^{\alpha}}$$

7

$$k = \frac{K}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{K_t} : \frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t}$$

Динамика капитала на единицу эффективности k_t



Модель полу-эндогенного роста

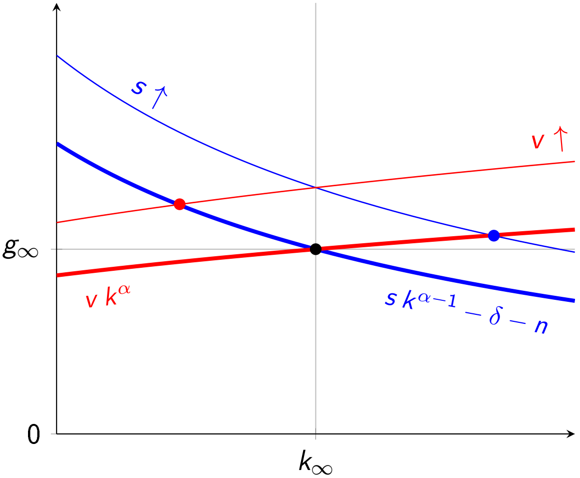


Рис.: Темп прироста подушевого капитала $\frac{\dot{K}}{K} = s\,k^{\alpha-1} - \delta - n$ и темп прироста эффективности труда $\frac{\dot{A}}{A} = v\,k^{\alpha}$ сходятся. Стационарный темп роста можно увеличить за счёт увеличения вложений в капитал ($s\uparrow$) или в эффективность труда ($v\uparrow$).

Модели с горизонтальными инновациями

Paul M. Romer,
Endogenous technological change
Journal of political Economy 98.5, Part 2 (1990): S71-S102.

Совершенно конкурентные секторы конечного производства и НИОКР

Конечное производство с несколькими отраслями i

$$Y = K_1^\alpha + K_2^\alpha + \ldots + K_A^\alpha, \qquad \alpha \in (0, 1),$$

принадлежащими локальным монополистам, возрастает при росте количества отраслей A:

$$K_i = \frac{K}{A} \qquad \Rightarrow \qquad Y = K^\alpha A^{1-\alpha},$$

за счёт увеличения специализации.

Экзогенная цена создания новой отрасли сектором НИОКР

$$\frac{1}{\lambda} > 0,$$

в единицах конечного продукта.

Решение задачи производителей конечного продукта

Задача производителей конечного продукта

$$\sum_{i=1}^{A} (K_i^{\alpha} - p_i\, K_i) \to \max_{K_i \geq 0}$$

даёт уравнение равновесия на рынке капитала

$$p_i = \alpha\, K_i^{\alpha-1}.$$

Решение задачи локального монополиста

Прибыль монополиста в производстве капитала отрасли i

$$p_i\,K_i - K_i \to \max := \Pi_i, \qquad \text{где} \qquad p_i = \alpha\,K_i^{\alpha-1}$$

Оптимальные цена и объем капитала

$$p_i = \frac{1}{\alpha}, \qquad K_i = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}.$$

Монополист всем потоком операционной прибыли

$$\Pi_i = (1-\alpha)\,\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} > 0.$$

расплачивается с долгом v за НИОКР, по ставке процента

$$r = \lambda\,\Pi_i = \lambda\,(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}.$$

Равновесный и оптимальный темпы прироста

Задача домохозяйства

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(c_t) \to \max_{c_t \geq 0}.$$

при ограничении на активы

$$a_{t+1} = (1+r)\, a_t + w_t - c_t, \quad \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t a_t \geq 0, \quad a_0 = v\, A_0.$$

Уравнение Эйлера дает темп роста потребления

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1+r}{1+\rho}, \quad \text{где} \quad r = \lambda\,(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}.$$

Модели с вертикальными инновациями

Philippe Aghion, Peter Howitt,
A Model of Growth through Creative Destruction
Econometrica, 60, 323–351.

Модели с вертикальными инновациями

Потенциальный монополист

$$Y = K^{\alpha} A^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1)$$

в случае успеха увеличивает качество A в γ раз.

вероятность успеха

$$\mu = \lambda \frac{M}{A}, \qquad \lambda (1 - \alpha) > 0,$$

прямо пропорциональна потраченным на инновацию средств M в единицах конечного продукта и обратно пропорциональна целевому уровню A.[8]

[8] В оригинальных работах зависимость $\mu = \lambda (1 - \alpha) \left(\frac{M}{A}\right)^{\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$.

Решение задачи производителей конечного продукта

Задача производителей конечного продукта

$$K^{\alpha} A^{1-\alpha} - p\,K \to \max_{K \geq 0}$$

даёт уравнение равновесия на рынке капитала

$$p = \alpha \left(\frac{K}{A} \right)^{\alpha - 1}.$$

Решение задачи временного монополиста

Прибыль монополиста в производстве капитала отрасли i

$$p\,K - K \to \max := \Pi, \qquad \text{где} \qquad p = \alpha\,(K/A)^{\alpha-1}$$

Оптимальные цена и объем капитала

$$p = \frac{1}{\alpha}, \qquad K = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A.$$

Монополист всем потоком операционной прибыли

$$\Pi = (1-\alpha)\,\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} A > 0.$$

Условие нулевой ожидаемой прибыли (меньший темп)

$$\mu\,\frac{\Pi}{r+\mu} = M \quad \Rightarrow \quad \lambda\,(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = r + \lambda\,\frac{M}{A}.$$

Внешние эффекты в моделях эндогенного роста

- Денежные внешние эффекты (pecuniary externalities), которые при совершенной конкуренции не влияют на эффективность.
    - *Эффект* излишка потребителя (*consumer-surplus effect*). Положительный внешний эффект. Производители (или потребители), которые покупают промежуточный товар у держателя патента получают некоторый излишек, т.к. монополист не может осуществить совершенную ценовую дискриминацию.
    - Переманивание покупателей. *business-stealing effect* Отрицательный. Создание новой идеи уменьшает прибыльность старых. Видимо сильнее в модели с вертикальными инновациями, чем в аналогичной с горизонтальными.
- внешние эффекты от исследований на последующие исследования в докладе не рассматривались